Lycée Pilote Sakiet Ezzit Sfax 2	Devoir de synthèse N°1 en mathématiques	Prof. : Hichem Zaghdane Hassène Bouzid
Niveau : $4^{ème}$ Maths	Date : 15 Décembre 2020	Durée : 3 heures

Exercice 1 : *5 points*

Le plan est orienté dans le sens direct .

Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles tangents extérieurement en un point A , de centres respectifs O_1 et O_2 et de même rayon . Soit Δ la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$ et par R la rotation de centre O_2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) On considère l'isométrie $f = R \circ T$.

a) Déterminer $f(O_1)$ puis déduire l'image de $\mathcal{C}_1$ par f .

b) Construire le point A' image de A par f .

c) Soit $\Delta' = f(\Delta)$. Déterminer la position relative de Δ' et $\mathcal{C}_2$ puis construire Δ'.

2) Soit I le point d'intersection des droites Δ et Δ' et $J = S_{\Delta'}(O_2)$.

a) Montrer que le triangle IAA' est équilatéral et que le quadrilatère IO_1O_2J est un losange .

b) En déduire que f fixe le point I puis caractériser f .

3) On pose $g = S_\Delta \circ f$. Déterminer $g(I)$ et $g(O_1)$ puis caractériser g .

Exercice 2 : *4 points*

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit m un nombre complexe différent de 1.

On considère l'équation (E) : $z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$ d'inconnue complexe z .

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) On désigne par A , M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $(1-i)$, $(m-i)$ et $(1-im)$.

Soit l'application f du plan $\mathcal{P}$ dans lui même qui , à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -iz + 2$.

a) Montrer que f est une isométrie .

b) Justifier que A est l'unique point fixe par f puis déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

c) Déduire que le triangle AM_1M_2 est rectangle et isocèle .

3) On suppose , dans cette question , que $m = e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi , \pi] \setminus \{0\}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 quand θ décrit $]-\pi , \pi] \setminus \{0\}$ puis déduire celui des points M_2 .

b) Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$. Déterminer l'affixe de M_1 pour que la distance AI soit maximale .

<u>Exercice 3</u> : ***4 points***

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\ \vec{j}\right)$.

Dans la figure ci-dessous , on a tracé sur $\left[0\ ,+\infty\right[$ les courbes $\left(\Gamma_1\right): y=\sin x$ et $\left(\Gamma_2\right): y=-\dfrac{x^3}{6}+x$.

1) En exploitant le graphique , justifier que pour tout $x\geq 0$, $-x+\dfrac{x^3}{6}+\sin x\ \geq\ 0$.

2) Montrer que pour tout $x\geq 0$, $x-\sin x\ \geq\ 0$.

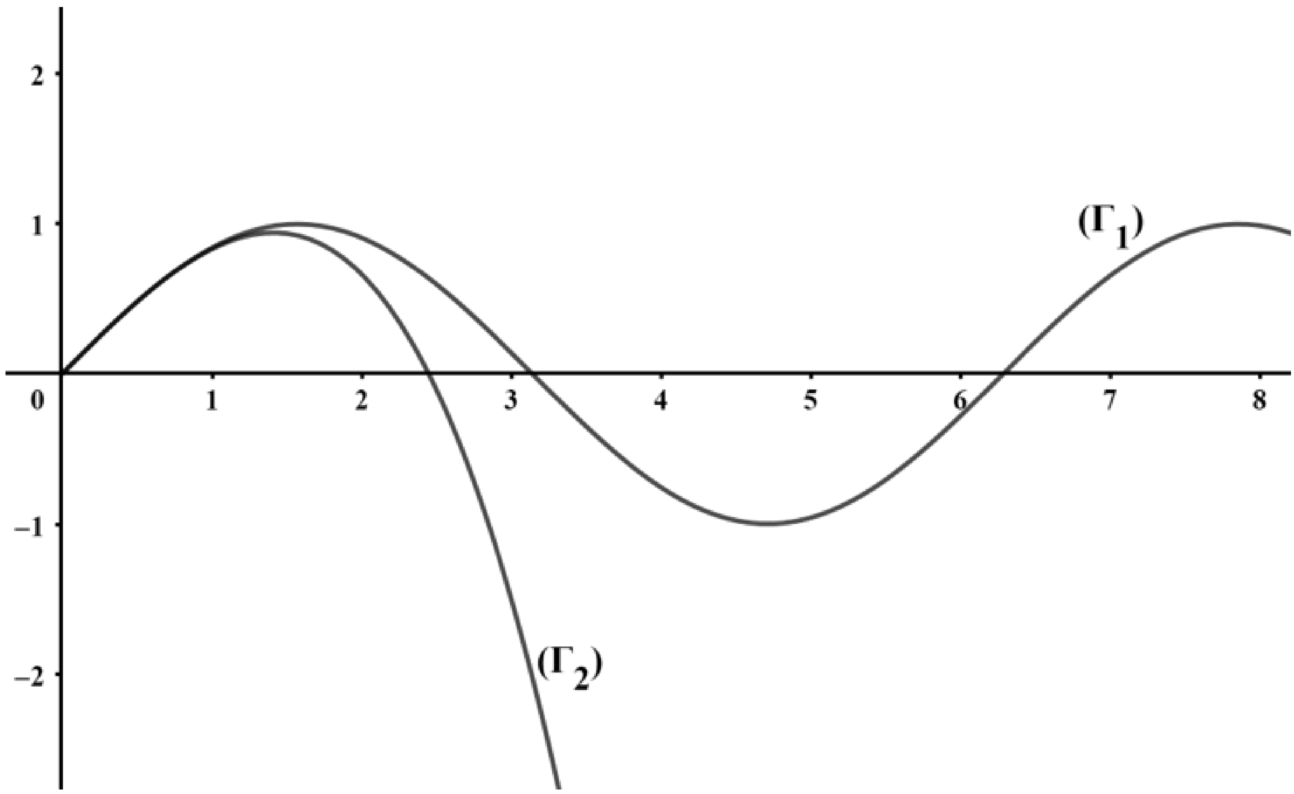
3) On considère les suites $\left(U_n\right)$ et $\left(V_n\right)$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ et $V_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$.

a) Montrer que $\left(V_n\right)$ est convergente vers $\dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3\leq\ n^4$.

c) Déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $V_n-\dfrac{1}{6n^2}\ \leq\ U_n\leq\ V_n$.

d) Montrer alors que la suite $\left(U_n\right)$ est convergente et préciser sa limite .



Exercice 4 : ***7 points***

I) Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=x^2-2\sqrt{x-1}$.

On désigne par $(\mathbf{C})$ la courbe représentative de f selon un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Préciser la nature de la branche infinie de $(\mathbf{C})$.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 puis interpréter ce résultat graphiquement .

2) Dans l'annexe ci-jointe , on a tracé selon le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite $\Delta : y=2x$, la courbe $(\Gamma): y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ et la courbe (Γ') de la fonction φ définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$.

Δ coupe (Γ) en un point d'abscisse α.

a) Déterminer graphiquement le signe de $\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$ sur $]1,+\infty[$.

b) Justifier que $f(\alpha)=\alpha^2-\dfrac{1}{\alpha}$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) Ecrire une équation de la tangente $(\mathbf{T})$ à $(\mathbf{C})$ au point d'abscisse 2 .

e) Exploiter la courbe (Γ') pour placer , sur l'annexe , le point $A(\alpha,f(\alpha))$ puis tracer sur cette annexe $(\mathbf{T})$ et $(\mathbf{C})$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=x$ puis déterminer le signe de $(f(x)-x)$.

II) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=f(U_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

1) a) Montrer que $U_n \geq 3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) Justifier que (U_n) est croissante .

c) Montrer que (U_n) diverge vers $+\infty$.

2) Soit (W_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n=f''(U_n)$. On pose $S_n=\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}W_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

Lycée Pilote Sakiet Ezzit Sfax 2	Devoir de synthèse N°1 en mathématiques	Prof. : Hichem Zaghdane Hassène Bouzid
Niveau : $4^{ème}$ Maths	Date : 15 Décembre 2020	Durée : 3 heures

Annexe à rendre